2

جامعة البعث   تحليل عقدي /2/   اسم الطالب :

كلية العلوم - قسم الرياضيات   الدورة الصيفية للعام الدراسي 2015-2016

السؤال الأول : (10+20 =30درجة)

1" – عين النقاط من القرص الدائري $|z|\le 1$ التي تبلغ عندها الدالة $f(z)=z^5-3z^2$.

2"_ أوجد نشر لورانت للدالة $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^3+z^2}$ في النطاق $|z+1|\succ 1$ ، ثمّ حدد من خلال هذا النشر نوع نقطة اللانهاية وقيمة الراسب عندها .

السؤال الثاني : (8+12=20درجة)

1"- عين نوع النقطة $z=0$ للدالة $f_1(z)=\dfrac{1}{2z\cos z-2z+z^3}$

2"- عين نوع نقطة اللانهاية للدالة $f_2(z)=\dfrac{e^z}{z^2+\pi^2}$ ثمّ أحسب قيمة الراسب عندها .

السؤال الثالث : (12+8=20درجة)

عين وصنف النقاط الشاذة لكل من الدالتين

$$f_1(z)=\frac{4z-\pi}{\sin z-\sqrt{3}\cos z}e^{\frac{1}{z-2}} \quad , \quad f_2(z)=\frac{z^3+4\pi^2 z}{e^z-1}$$

السؤال الرابع : (15+15=30درجة)

إعتماداً" على مبرهنة الرواسب أحسب قيمة التكاملين

$$I_1=\int_{|z|=4}\frac{1}{\sin 2z}dz \quad , \quad I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{\left|z-\frac{1+i}{2}\right|=1}\frac{4z^3}{z^4-1}dz$$

****

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

الإجابات النموذجية مع سلم درجات مادة التحليل العقدي /2/ الدورة الصيفية 2015-2016

جواب السؤال الأول : (~~10+15=25 درجة~~) 10+20=30 درجة

(10) 1" بما أنّ الدالة كثيرة حدود فهي دالة شاملة وبالتالي فهي تحليلية على $|z| \le 1$ ومنه فإن هذه الدالة مستمرة على $|z| = 1$ وتحليلية عند كل نقطة من نقاط داخليتها فاستنادا" على مبرهنة القيمة العظمى فإن هذه الدالة تبلغ قيمتها العظمى على محيط هذا القرص وليس عند أي نقطة من داخليته (2)

بفرض أنّ $z = e^{i\theta} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$ عندئذ (1)

$$|f(z)|^2 = f(z).\overline{f(z)} = (e^{i5\theta} - 3e^{i2\theta}).(e^{-5i\theta} - 3e^{-i2\theta})$$

$$= 1 - 3e^{3i\theta} - 3e^{-3i\theta} + 9 = 10 - 6\cos 3\theta$$ (2)

نعلم أنّ $-1 \le \cos 3\theta \le 1 \Rightarrow -6 \le -6\cos 3\theta \le 6 \Rightarrow 4 \le 10 - 6\cos 3\theta \le 16$

ومنه فإن $10 - 6\cos 3\theta = 16 \Rightarrow -6\cos 3\theta = 6 \Rightarrow \cos 3\theta = -1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$ (2)

من أجل $n = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

ومن أجل $n = 1 \Rightarrow \theta = \pi \Rightarrow z = e^{i\pi} = -1$ (1)

$n = 2 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{3}$, $z = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

أي أنّ الدالة تبلغ قيمتها العظمى عند $z = -1$, $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

(20) 2" $f(z) = \frac{2z+1}{z^3+z^2} = \frac{2z+2-1}{z^2(1+z)} = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+z} = (2 - \frac{1}{z+1}).\frac{1}{z^2}$ (3)

ولكن $\frac{1}{z} = \frac{1}{-1+z+1} = \frac{1}{z+1}.\frac{1}{1-\frac{1}{z+1}} = \frac{1}{z+1}(1 + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} + ... + \frac{1}{(z+1)^n} + ...)$ (3)

$$= \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^3} + ... + \frac{1}{(z+1)^n} + ...$$ (3)

ومنه وباشتقاق طرفي المساواة السابقة نجد أنّ

(3) $$\frac{1}{z^2}=\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{2}{(z+1)^3}+....+\frac{n}{(z+1)^{n+1}}+....$$

وبالتالي فإنّ
$$f(z)=(2-\frac{1}{z+1}).(\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{2}{(z+1)^3}+......+\frac{n}{(z+1)^{n+1}}+....)$$

(3) $$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(z+1)^{n+1}} \qquad 1<|z+1|<\infty$$

$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(z+1)^n} \quad 0<|z+$

هناك طريقة ثانية

ومنه نستنتج أنّ نقطة اللانهاية هي صفر من الدرجة الثانية للدالة و $\mathrm{Res}(f(z),\infty)=0$

(3) (2)

جواب السؤال الثاني : (8+12=20درجة)

(8) 1"- الدالة $f_1(z)$ هي من الشكل $f_1(z)=\frac{1}{h(z)}$ حيث $h(z)=2z\cos z-2z+z^3$

(4) وبما أنّ $h^{(5)}(0)\neq 0$ = $h(0)=h'(0)=h''(0)=h'''(0)=h^{(4)}(0)=0$

(4) أي أنّ $z=0$ هي صفر من الدرجة الخامسة للدالة $h(z)$ وبالتالي هي قطب من الرتبة الخامسة للدالة $f_1(z)$.

(12) 2"- نعوض z $\frac{1}{t}$ فنجد أنّ $f_2(\frac{1}{t})=\frac{t^2e^{\frac{1}{t}}}{1+\pi^2t^2}$ وبما أنّ نهاية هذه الدالة غير موجودة عندما تسعى نحو الصفر وذلك لأنّ

(6) $$\lim e^{\frac{1}{t}}=0 \qquad \lim e^{\frac{1}{t}}=\infty \quad \text{بينما} \quad \lim\frac{t^2}{1+\pi^2t^2}=0$$

أي أنّ $t=0$ هي نقطة شاذة أساسية وبالتالي فإنّ نقطة اللانهاية هي شاذة أساسية

(3) قيمة الراسب تعطى ب $$\mathrm{Res}\,\frac{e^z}{z^2+\pi^2}=-\mathrm{Res}\,\frac{e^z}{z^2+\pi^2}-\mathrm{Res}\,\frac{e^z}{z^2+\pi^2}$$

(3) $$=-\frac{e^z}{2z}-\frac{e^z}{2z}=-\frac{e^{i\pi}}{2i\pi}-\frac{e^{-i\pi}}{-2i\pi}=-\frac{1}{\pi}(\frac{e^{i\pi}-e^{-i\pi}}{2i})=-\frac{1}{\pi}\sin\pi=0$$

جواب السؤال الثالث : (12 + 8 = 20 درجة)

(2) النقاط الشاذة للدالة $f_1(z)$ هي جذور المعادلتين $\sin z - \sqrt{3}\cos z = 0$ و $z - 2 = 0$ 12

من الأولى نجد أن $z = 2$ وبما أنها صفر من الدرجة الأولى للدالة $h(z) = z - 2$ فهي

(5) قطب بسيط للدالة $f(z) = \dfrac{1}{z-2}$ ومنه فهي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{f(z)}$ إذاً" هي نقطة

شاذة أساسية للدالة $f_1(z)$ أما جذور المعادلة الثانية فهي جذور المعادلة $2\sin(z - \dfrac{\pi}{3}) = 0$

(5) أي $z = \dfrac{\pi}{3} + n\pi \quad , \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ وهذه النقاط هي أقطاب بسيطة للدالة لأنها تعدم المقام ولا تعدم البسط

(2) النقاط الشاذة للدالة $f_2(z)$ هي جذور المعادلة $e^z - 1 = 0$ أي $z = 2n\pi i$ 8

(4) من أجل القيم $n = -1$ $n = 1$ $n = 0$ فإنّ النقاط $z = -2\pi i$ $z = 2\pi i$ $z = 0$

(2) هي أصفار من الدرجة الأولى لكل من البسط والمقام لذلك فإنّ هذه النقاط هي نقاط شاذة قابلة للأصلاح أما باقي النقاط فهي أقطاب بسيطة.

جواب السؤال الرابع :(15+15=30درجة)

(3) "1- قيمة التكامل حسب مبرهنة الرواسب هي $I_1 = 2\pi i \left(\sum \operatorname{Res} \dfrac{1}{\sin 2z}\right)$ 15

(2) النقاط الشاذة للدالة المستكملة هي جذور المعادلة $\sin 2z = 0$ أي $z = \dfrac{n\pi}{2}$ والنقاط التي

(2) تقع داخل الكفاف المعطى هي $z = -\pi$ $z = \pi$ $z = -\dfrac{\pi}{2}$ $z = \dfrac{\pi}{2}$ $z = 0$ لذلك فإنّ

(2) $$I_1 = 2\pi i (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5)$$

(6) $$I_1 = 2\pi i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \pi i$$

(1) (1) (1) (1) (1) (1)

4 { طريقة ثانية : التكامل السابق يكتب بالشكل $I_1 = \int_{|z|=4} \frac{1}{\sin 2z} dz = \frac{1}{2} \int_{|z|=4} \frac{\frac{1}{\cos^2 z}}{\tan z} dz$

3 وقيمة هذا التكامل تحسب اعتماداً" على العلا قة $\int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (N-P)$

3 { إنّ أصفار $f(z) = \tan z$ هي جذور المعادلة $\sin z = 0$ أي $z = n\pi$ ومن هذه الأصفار نجد أنّ ثلاثة أصفار تقع داخل الكفاف المعطى أي أنّ $N = 3$

3 { أماأقطاب هذه الدالة فهي جذور المعادلة $\cos z = 0$ أي $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ومن بين هذه النقاط هناك نقطتان فقط تقعان في داخلية الكفاف المعطى أي أنّ $P = 2$ ومنه فإنّ

2 { $$I_1 = \frac{1}{2} 2\pi i (3-2) = \pi i$$

2 أما قيمة التكامل الثاني فتعطى من خلال العلاقة $I_2 = N - P$ وذلك لأنّ هذا التكامل من

2 الشكل $I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ حيث $f(z) = z^4 - 1$ أصفار هذه الدالة هي (15)

2 + 2 $z_1 = 1 \ , \ z_2 = i \quad , \ z_3 = -1 \quad , z_4 = -i$ ونلاحظ أنّ هناك صفران فقط يقعان في

2 داخلية الدائرة $\left| z - \frac{1+i}{2} \right| = 1$ وهما $z_1 = 1 \ , \ z_2 = i$ أي أنّ $N = 2$ وبما أن

2 الدالة ليس لها نقاط شاذة فعندئذ $P = 0$ أي أنّ $I_2 = (N-P) = 2 - 0 = 2$

2

انتهت الإجابات

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح